Ateliers Primaires
Cycle polyèdres

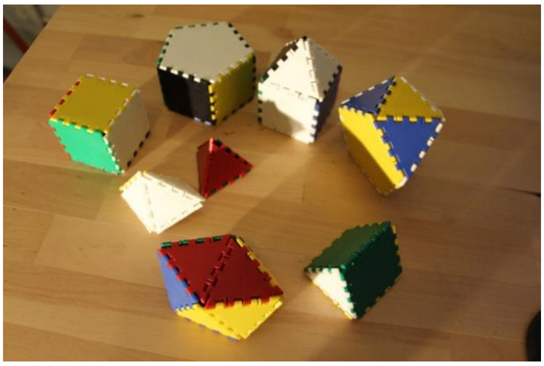
Le matériel : des formes géométriques emboîtables (*polydrons*) permettant la réalisation de figures géométriques en trois dimensions. Les figures sont des triangles équilatéraux, des carrés et des pentagones réguliers.

Au début du cycle, il est préférable de laisser un temps aux enfants pour qu'ils découvrent et manipulent le matériel sans contraintes. Il est probable que certains d'eux se mettent à construire naturellement des polyèdres (c'est-à-dire des figures qui se referment sur elles-mêmes). On pourra ensuite peu à peu augmenter les contraintes.

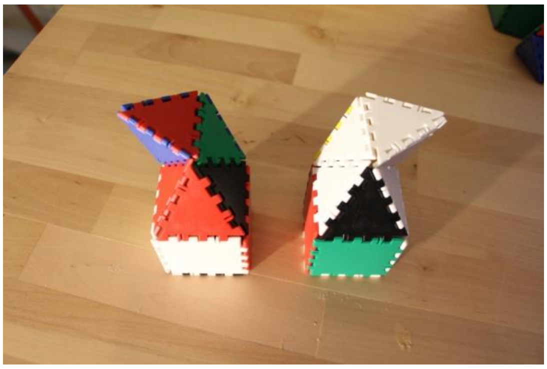
1. Le musée des polyèdres.

Pouvez-vous construire des polyèdres, c'est-à-dire des boîtes fermées (avec un intérieur et un extérieur) ?

Après un certain temps de construction de polyèdres, on peut commencer à constituer un petit "musée des polyèdres" dans un coin de la classe. Les enfants montrent leurs constructions et pour qu'elles soient intégrées au musée, il faut qu'elles n'y soient pas déjà (pas de modèles en double).



La contrainte de "pas de doubles" va déjà poser quelques questions. Accepte-t-on deux polyèdres identiques mais pas de la même taille (par exemple un grand et un petit cube) ? La question des symétries est plus subtile : certains polyèdres sont symétriques, l'un est le miroir de l'autre (comme une main droite et une main gauche). Considère-t-on les symétriques comme deux polyèdres distincts ?



La contrainte “pas de doubles”, peut entraîner les enfants sur la voie d’une recherche exhaustive et méthodique des polyèdres, depuis les plus simples jusqu’au plus complexes.

Quel est le plus petit polyèdre possible ? Que signifie “le plus petit possible” ? Avec le moins de pièces ?

Les enfants trouvent généralement assez rapidement le tétraèdre (4 faces triangulaires) et sont d’accord pour dire qu’on ne peut pas faire moins. C’est l’occasion de les inciter à expliquer pourquoi on ne peut pas. Peuvent-ils, le prouver ?

Il est arrivé sur ce moment de l’atelier qu’un enfant me montre sa main vide en disant “voici un polyèdre avec zéro faces. On ne peut pas faire moins !” Il faut discuter avec les enfants pour savoir s’ils acceptent ce polyèdre vide comme une solution. Après tout, 0 est un nombre, alors pourquoi ne pas considérer ce vide comme le plus petit des polyèdres ?

Le tétraèdre est-il le seul polyèdre à 4 faces ? Quels sont les polyèdres à 5, 6, 7 faces … ? A chaque fois, peut-on prouver qu’on les a tous ?

Il est possible aussi qu’une discussion arrive sur le fait qu’il y a certains polyèdres qu’on ne peut pas faire avec les pièces proposées, puisqu’on a uniquement des triangles, carrés et pentagones réguliers. Les enfants remarqueront peut-être que l’on peut faire un hexagone avec six triangles. Dans ce cas, il est possible de leur proposer de dessiner de nouveaux polyèdres. (voir plus bas la section sur ce sujet).

Quelques tris

Une fois que le musée commence à se remplir, on peut se mettre à trier les polyèdres. Si les enfants ont déjà fait des activités de tri lors d’un précédent cycle, on peut faire un bref rappel avec eux, pour voir si certains tris imaginés pour les formes planes fonctionnent toujours en 3D.

Quelques idées de tris qui peuvent apparaître :

- par nombre de faces
- par forme des faces (mais dans ce cas, comment classe-t-on ceux dont toutes les faces n’ont pas la même forme ?).
- Selon la taille (cette notion est toujours très floue, comme pour les figures planes. La notion de volume peut apparaître, comment le mesurer ?)

Comme pour les formes planes, il est possible de proposer un “Qui est-ce ?” en 3D.

Il est également possible de classer les formes selon leur régularité.

Pouvez-vous faire des polyèdres dont toutes les faces et tous les sommets sont identiques ? Cela signifie que l’on n’utilise qu’un seul type de forme, et qu’il y en a toujours autant autour de chaque sommet.

Petit encadré “culturel”

Rappelons les règles du jeu à respecter pour avoir un polyèdre régulier : toutes les faces doivent être des polygones réguliers identiques, et tous les sommets doivent également être identiques. Autrement dit, il faut qu’il y ait le même nombre de faces autour de chaque sommet.

Commençons par les triangles équilatéraux. Mettons-en 3 autour d’un sommet, voyons ce que ça donne en volume... Il reste exactement la place pour un dernier triangle équilatéral : nous venons de fabriquer le polyèdre le plus simple de tous, le « tétraèdre régulier ».

Glissons à présent un triangle de plus autour du sommet. On obtient une sorte de pyramide à base carrée, sans la base. Pour compléter et finir ce polyèdre, ce n’est pas compliqué : il suffit de fabriquer une seconde pyramide semblable, et de les assembler par la base. Vous pouvez le vérifier, les « nouveaux » sommets obtenus sont exactement semblables aux deux premiers. Ce « diamant » s’appelle l’octaèdre régulier

Il y a encore de la place pour un 5ème triangle autour d’un sommet. Le polyèdre sera plus difficile à construire, car il a beaucoup plus de faces : 20. C’est l’icosaèdre, que vous réussirez à construire avec beaucoup de patience (mais si, mais si) en assemblant 5 triangles autour de chaque sommet.

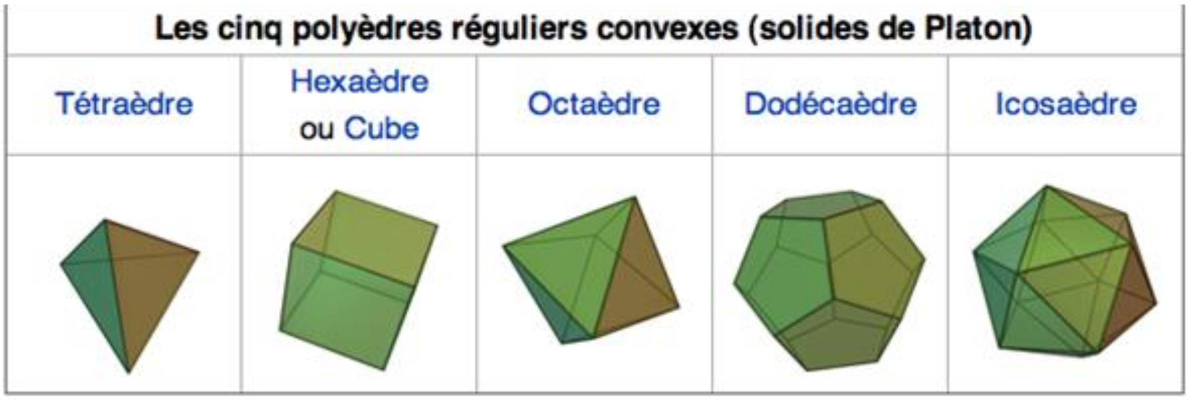
En revanche, avec 6 triangles, vous n’arriverez pas à créer un sommet, puisque la somme de six angles de triangles équilatéraux donne 360°, un tour complet ! Résultat, impossible de faire un sommet de polyèdre…

Changeons donc de forme, passons aux carrés. On peut en mettre 3 par sommet, ce qui amène bien sûr au cube (dont le nom savant, qui se réfère à ses 6 faces, est l’hexaèdre). Impossible de glisser un 4ème carré autour d’un des sommets, vous vous retrouveriez bien entendu dans la même situation qu’avec 6 triangles équilatéraux : à plat.

Il reste les pentagones réguliers ! En en disposant 3 autour de chaque sommet, tout se referme avec 12 faces : voici le dodécaèdre régulier.

Et après ? Plus rien. Ni 4 pentagones, impossible à caser autour d'un sommet commun, ni hexagones réguliers, qui sont déjà « à plat » quand on en dispose trois, ni polygones avec encore plus de côté que l'on ne pourra même pas associer par trois à plat... Bref, la liste est déjà terminée !

Il n’y a donc que cinq polyèdres qui répondent à cette contrainte, on les appelle les polyèdres réguliers ou solides de Platon.

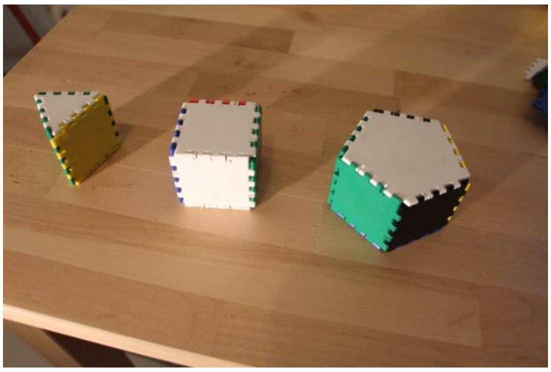


Platon n’est absolument pas le découvreur de ces formes, mais il les a popularisés en les associant aux quatre éléments : eau, air, feu, terre et le dernier, le dodécaèdre, étant associé à la forme de l’univers dans son ensemble. Aujourd’hui on sait bien que sa théorie ne tient pas debout scientifiquement, mais on continue à donner son nom aux cinq solides.

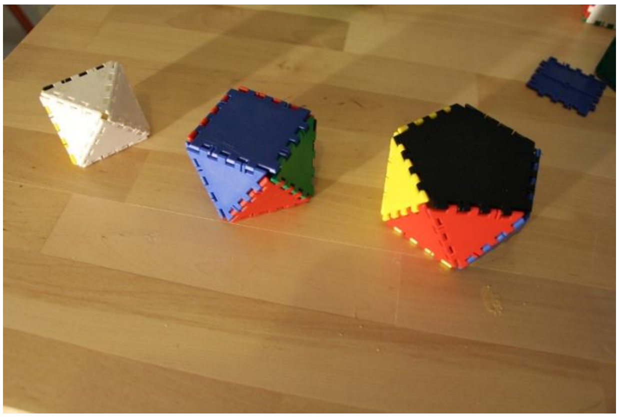
Il peut être intéressant à un moment de faire le point sur la nomenclature des polyèdres : le nombre de face en grec + suffixe *-èdre*. Ainsi, le cube se nomme aussi hexaèdre car il a 6 faces.

Peut-on faire des polyèdres dont tous les sommets sont identiques, mais cette fois les faces peuvent êtres différentes ?

Ces solides s’appellent les solides d’Archimède. On ne peut pas tous les faire avec le matériel (il faudrait des formes avec plus de côtés), mais on peut déjà en faire certains et voir apparaître des familles. Par exemple, les prismes sont composés de deux bases identiques parallèles reliées par des carrés :



On peut comprendre, même sans les construire que l’on peut continuer cette série avec une base en forme d’hexagone, d’heptagone, d’octogone… Si les enfants découvrent cette famille, ils peuvent en déduire qu’il existe une infinité de polyèdres qui répondent à la question, même sans les avoir tous construits !
Il existe aussi la famille des antiprismes, qui est une variante des prismes avec des triangles à la place des carrés.

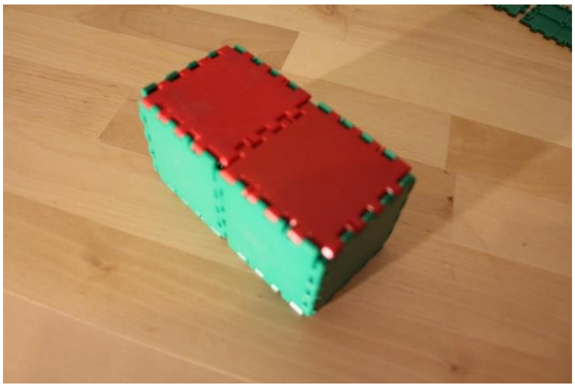


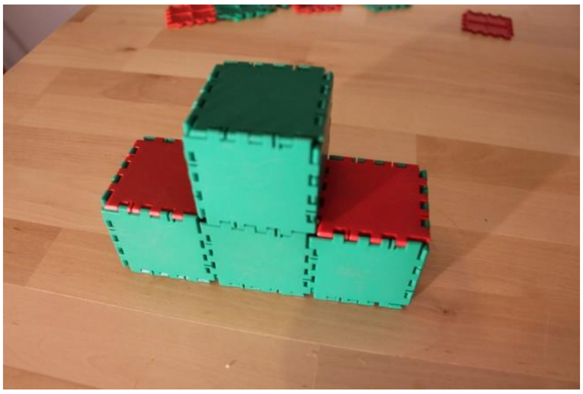
Remarquez que le prisme à base carrée et l’antiprisme à base triangulaire ont toutes leurs faces identiques, ce devrait donc être aussi des solides de Platon. Est-ce vrai ? Si oui, lesquels ?

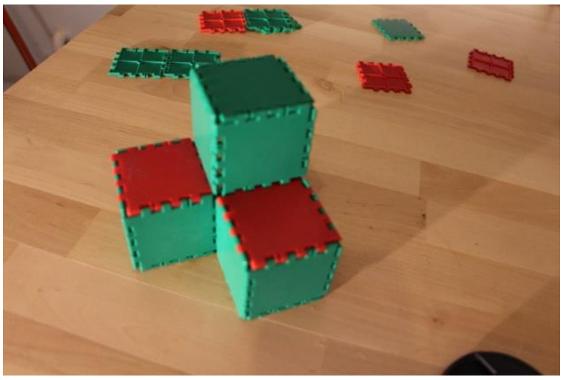
Autour du vocabulaire

Le vocabulaire des polyèdres peut-être l’occasion de nombreux débats. Les notions de faces, d’arêtes et de sommets ont des cas limites qui sont l’occasion de discussion entre les enfants.

Sur les formes suivantes, les pièces rouges forment-elles une seule face ?







Sur cette dernière figure, il y a aussi une ambiguïté sur les arêtes et les sommets. Le point de jonction entre les deux carrés rouges est-il un sommet ? Les deux côtés des carrés qui sont dans l’alignement l’un de l’autre forment-ils deux arêtes ou une seule ?

Il peut également arriver sur des figures plus complexes, qu'il ne soit pas évident de voir si deux pièces sont sur un même plan, ne formant qu'une seule face, ou si elles forment un angle presque plat, mais pas exactement. Dans ce cas là, les enfants ont souvent l'idée de mettre la face à plat sur la table pour voir si ça bascule ou non. C'est en tout cas l'occasion de leur faire remarquer la différence entre "on a l'impression que c'est vrai" et "on sait que c'est vrai".

Compter les éléments

Pour chaque polyèdre, il est possible de compter le nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Ces informations peuvent être compilées dans un tableau. De nombreuses remarques et interrogations peuvent alors surgir de ce tableau.

Si par exemple, on fait le tableau pour tous les polyèdres composés uniquement de triangles (on les appelle les deltaèdres), on remarque que les nombres de sommets vont de 1 en 1 (4, 5, 6, 7...) les nombres de face de 2 en 2 (4, 6, 8, 10,...) et les nombres d'arêtes de 3 en 3 (6, 9, 12, 15).

Est-on sûr que l'on ne peut pas construire de deltaèdre avec un nombre impair de faces ? Ou avec un nombre d'arêtes qui n'est pas multiple de 3 ? Peut-on expliquer ce phénomène ?

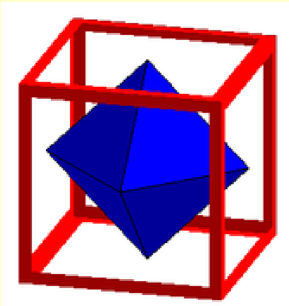
Si on fait le tableau avec les solides de Platon, on remarque qu'ils vont 2 par 2 en inversant les nombres de sommet et de face. Par exemple le cube a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets tandis que l'octaèdre a 8 faces, 12 arêtes et 6 sommets. De même le dodécaèdre et l'icosaèdre vont ensemble. Le tétraèdre va avec lui même puisqu'il a autant de faces que de sommets.

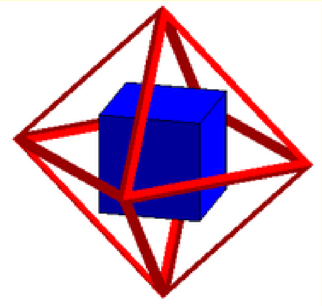
Peut-on observer ce phénomène avec d'autres polyèdres que les solides de Platon ? Peut-on comprendre ce phénomène ? (Quand on regarde un cube et un octaèdre on peut sentir intuitivement qu'ils ont quelque chose en commun, même si ce n'est pas facile à exprimer.)

Petit encadré culturel : la dualité

À chaque polyèdre correspond son "dual", un autre polyèdre qui lui est très lié. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit de placer un sommet au milieu de chaque face de l'un des deux, et de relier les sommets qui se trouvent sur des faces voisines. Le deuxième polyèdre apparaîtra. Si on recommence l'opération, on tombera à nouveau sur le premier.

Exemple de dualité : l'octaèdre, en bleu, est le dual du cube (à gauche). Et le cube est le dual de l'octaèdre (à droite).





De même, l'icosaèdre et le dodécaèdre sont le dual l'un de l'autre, et le tétraèdre est "auto-dual" : c'est son propre dual !

Cette question peut être intéressante pour des élèves. Comme j'expliquais (sans utiliser le mot de "dual") la relation entre le cube et l'octaèdre, une élève prend le prisme à base pentagonale et me demande "et celui-là ?" Je l'ai laissé chercher. Après quelques erreurs, elle m'a bien fabriqué la "soucoupe volante" formée de deux fois cinq triangles :

Je lui ai posé la question pour d'autres polyèdres, mais il faudrait rapidement d'autres formes pour pouvoir construire effectivement les duaux de tous les polyèdres proposés...

Plus complexe, mais on peut y arriver en fin de période, la formule d'Euler affirme que pour tous les polyèdres, on a Faces+Sommets-Arêtes=2. Par exemple, pour le cube : 6+8-12=2. On peut pressentir cette formule avec les deltaèdres. Attention, cette formule n'est vrai que pour les polyèdres "sans trous". Il peut arriver que certains enfants, de plus en plus créatifs, se lancent dans des structures plus compliquées...

Dessin et perspective

Dessiner les formes, peut-être un moyen pour les enfants de prendre le temps de bien comprendre en détail comment est construit un polyèdre. Cela les fait réfléchir à la perspective.

Comment dessiner un cube ? Une pyramide ? Des polyèdres plus complexes ?

Il y a plusieurs points de vues différents, donc une même figure peut donner des représentation dessinées différentes. Le dessin permet aussi plus de possibilités : on peut dessiner des polyèdres pour lesquels on ne possède pas les pièces nécessaires pour les construire.